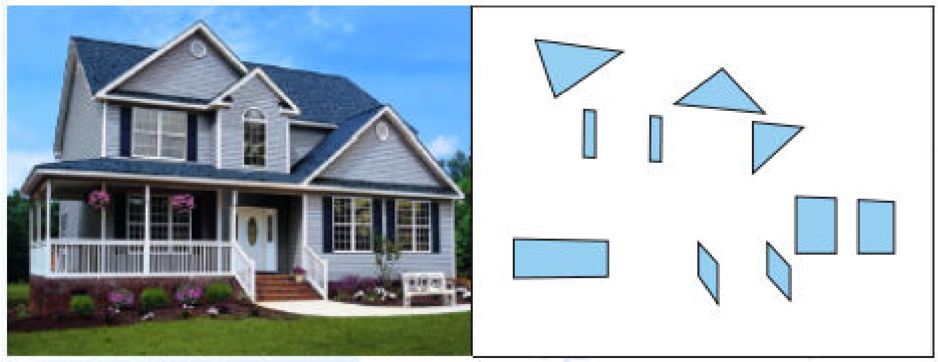
CAPITULO V: Cuadriláteros

En la figura anterior vemos una casa, y una representación de algunas figuras geométricas que se pueden observar.



¿A parte de triángulos cuáles otras figuras tenemos? ¡Cuadriláteros!

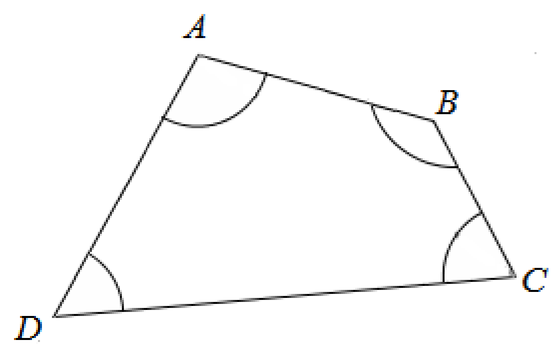
Algunos pueden ser cuadrados, otros rectángulos, rombos, romboides dependiendo de las características que tengan.

En este capítulo, repasaremos las principales propiedades de cada uno de ellos. Empezamos con un repaso de las características que tiene en general cualquier cuadrilátero.

Un cuadrilátero es una figura plana cerrada formada por la unión de cuatro segmentos que se intersecan únicamente en sus extremos. Los **vértices** del cuadrilátero son los extremos de los segmentos y son cuatro puntos donde no hay tres colineales. Los segmentos que forman el cuadrilátero se llaman **lados** y los ángulos que forman los lados se llaman **ángulos internos** del cuadrilátero.

A. Suma de los ángulos internos

Ejercicio Introductorio A. Santiago se encontró una pieza de madera como se muestra en la figura. Quiere saber cuánto suman sus ángulos internos, y sus ángulos externos.



1. Trace la diagonal $\overline{AC}$.
2. ¿En cuántos triángulos dividió la figura?
3. Explique por qué al sumar los ángulos internos de ambos triángulos se obtiene la suma de los ángulos internos del cuadrilátero original.
4. ¿Cuánto es la suma de los ángulos internos?
5. Exprese cada ángulo externo como el suplemento de los ángulos internos.
6. Sume las expresiones anteriores, y determine la suma de la medida de los cuatro ángulos externos del cuadrilátero.

EJEMPLO 1. Tres ángulos de un cuadrilátero miden $50°, 120°$ y $100°$. ¿Cuánto mide el cuarto ángulo?

Entonces, podemos establecer que en un cualquier cuadrilátero:

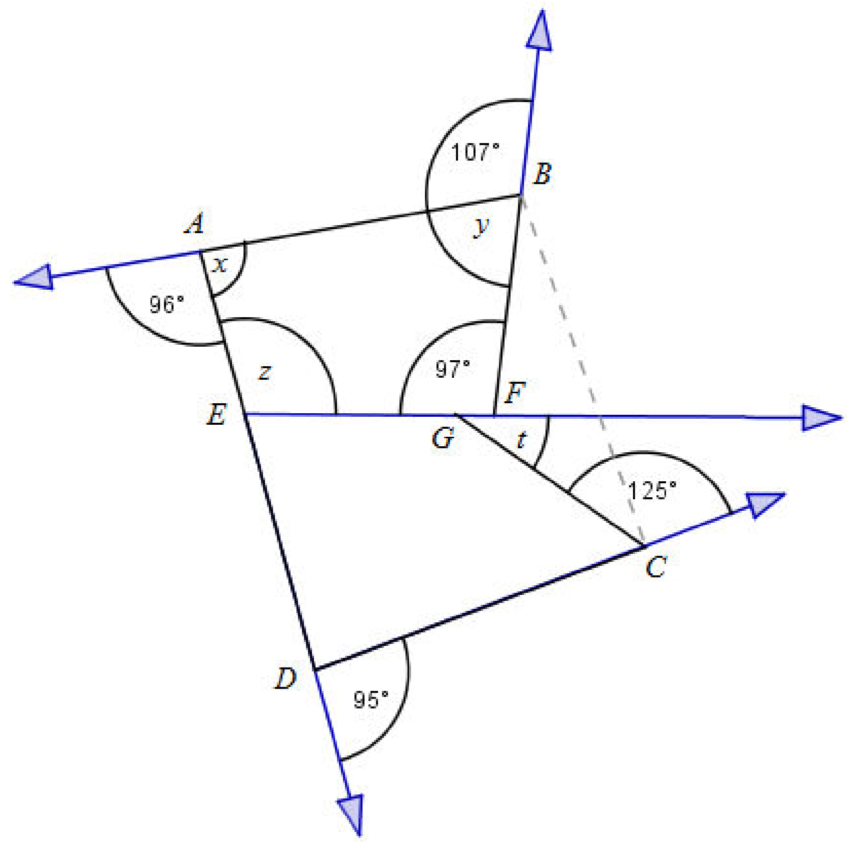
La suma de los ángulos internos es $360°$ y la suma de los ángulos externos es $360°$

EJEMPLO 2. Un parque tiene la forma del cuadrilátero $ABCD$ mostrado en la figura.

El parque se divide a través del rayo $\overrightarrow{EF}$ para dejar dos regiones, en una de las cuales se colocarán juegos infantiles, y en el otro un área para picnic.

Para determinar la forma en que se deben colocar los juegos, un ingeniero ha encontrado la medida de algunos ángulos, pero necesita encontrar las medidas de los señalados con x, y, z, t.

Encuentra esas medidas, utilizando los teoremas vistos en esta sección.



Soluciones A.

EJEMPLO 1. Tres ángulos de un cuadrilátero miden $50°, 120°$ y $100°$. ¿Cuánto mide el cuarto ángulo?

Como la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es $360°$, entonces, si x es la medida del cuarto ángulo, se cumple: $x + 50° + 120° + 100° = 360° \Rightarrow x = 360° - 270° = 90°$.

EJEMPLO 2.

Por ser ángulos que forman un par lineal en el vértice A; $x = 180° - 96° = 84°$ y $y = 180° - 107° = 73°$.

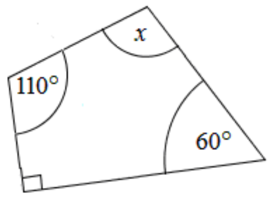
Al aplicar la suma de los ángulos internos en el cuadrilátero $ABFE$:

$$z = 360° - 97° - x - y = 360° - 97° - 84° - 73° = 106°.$$

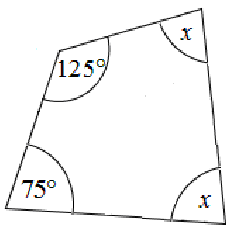
Al aplicar la suma de los ángulos externos en el cuadrilátero $EGCD$: $t = 360° - 106° - 125° - 95° = 34°$.

Ejercicio A. En cada una de las siguientes figuras, encuentre el valor de las variables:

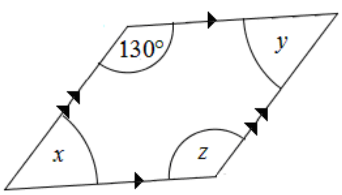
1.



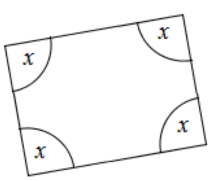
2.



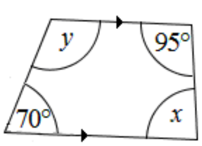
3.



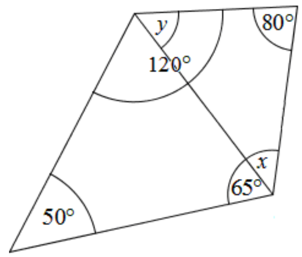
4.



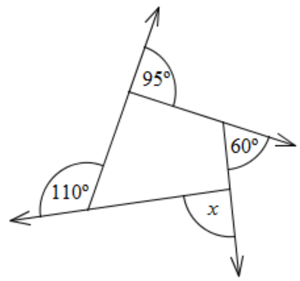
5.



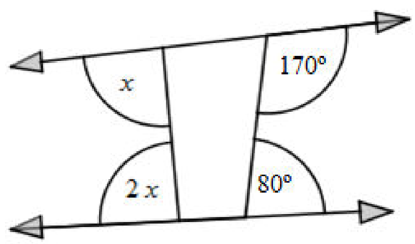
6.



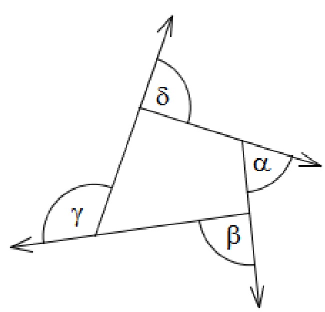
7.



8.

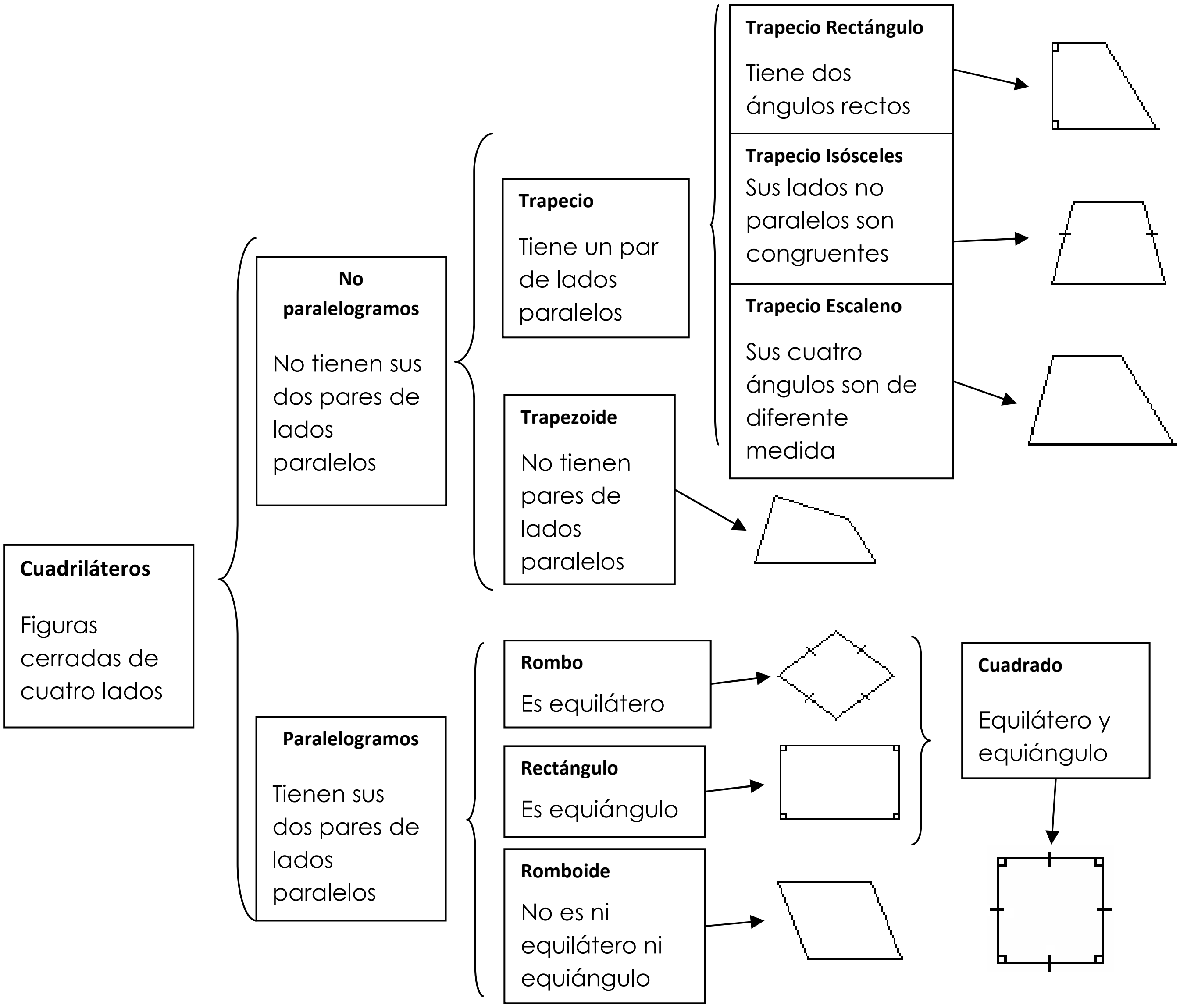


9. En la siguiente figura, encuentre la suma de las medidas de los ángulos α, β, γ y δ.



B. Clasificación de los cuadriláteros

Según sus características más importantes, los cuadriláteros se clasifican de la siguiente manera:

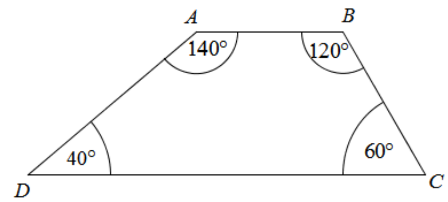


Esta clasificación es de acuerdo con las propiedades del cuadrilátero. Tenerlas presente es importante para resolver problemas con estas figuras.

EJEMPLO 3. En el cuadrilátero $ABCD$, $m\angle A = 140°$, $m\angle C = 60°$ y la medida del ángulo B es el triple de la medida del $\angle D$. ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

Soluciones B.

EJEMPLO 3. En el cuadrilátero $ABCD$, $m\angle A = 140°$, $m\angle C = 60°$ y la medida del ángulo B es el triple de la medida del $\angle D$. ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

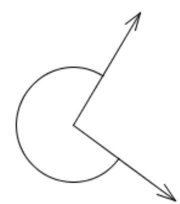


Los ángulos $\angle B$ y $\angle D$ deben sumar $360° - 140° - 60° = 160°$ y como el ángulo $\angle B$ es el triple del $\angle D$, entonces su suma $m\angle B + m\angle D$ debe ser cuatro veces $m\angle D$.

Así, $m\angle D = \dfrac{160°}{4} \Rightarrow m\angle D = 40°$ y $m\angle B = 3 \cdot 40° = 120°$.

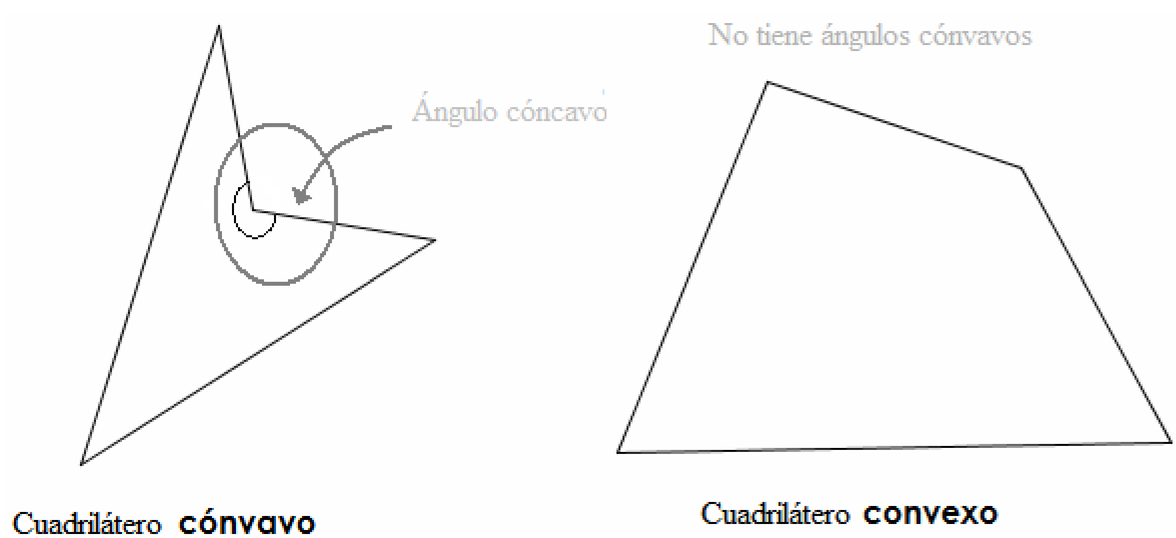
Representamos el cuadrilátero en una figura, donde al observar que las líneas $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son paralelas (forman ángulos suplementarios) deducimos que el cuadrilátero debe ser un trapecio escaleno.

Los cuadriláteros también se pueden clasificar en **cóncavos** o **convexos** según la siguiente definición:



Un ángulo se dice **cóncavo** si mide más de $180°$.

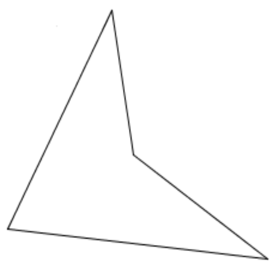
Un cuadrilátero se dice **cóncavo** si tiene algún ángulo interno cóncavo, de lo contrario se dice **convexo.**



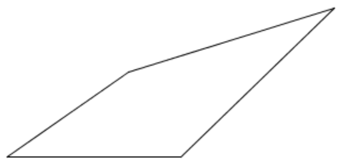
Ejercicio B.

1. Clasifique los siguientes cuadriláteros en cóncavos o convexos. Si el cuadrilátero es cóncavo señale el ángulo cóncavo.

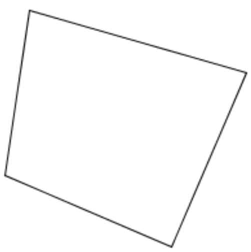
a)



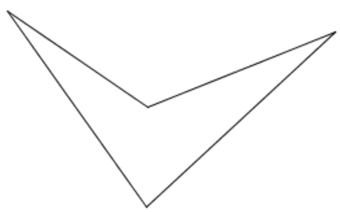
b)



c)



d)

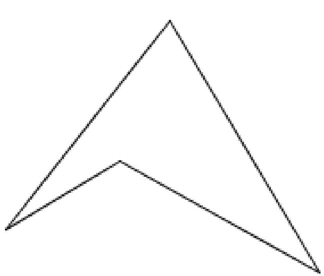


2. En el cuadrilátero $ABCD$ los ángulos internos miden respectivamente: $3x, 2x+10°, 2x$ y $2x-10°$. ¿Cuánto miden cada ángulo? ¿Cómo se puede clasificar el cuadrilátero?

3. En el siguiente cuadrilátero cóncavo trace un segmento $\overline{XY}$ con las siguientes características:

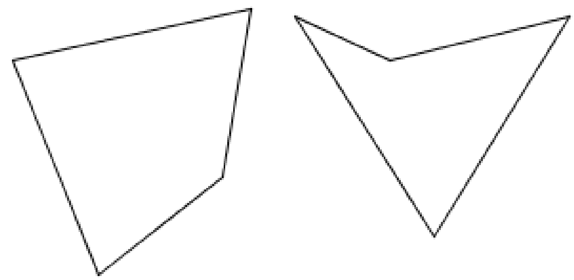
(i) Los extremos X y Y pertenecen al interior del cuadrilátero.

(ii) El segmento $\overline{XY}$ tiene puntos en el exterior del cuadrilátero.

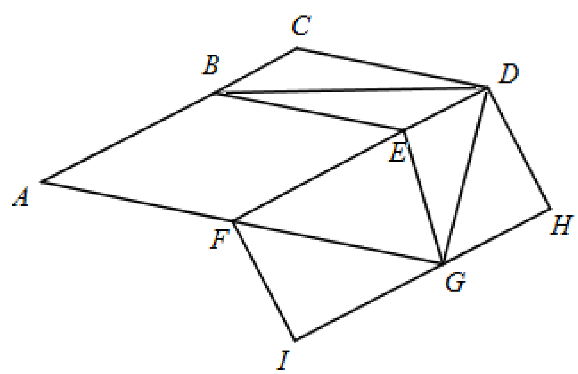


4. Una definición alternativa para cuadrilátero convexo es la siguiente: "Al prolongar cualquiera de sus lados, todo el cuadrilátero estará contenido en un mismo semiplano".

Verifique esa condición en el cuadrilátero convexo y en el cuadrilátero cóncavo verifique que la condición no se cumple



5. Como parte de un diseño para un proyecto de arquitectura, un estudiante mostró la siguiente figura, donde $AB = BE$, $\overline{FI} \perp \overline{IH}$, $\overline{AC} \parallel \overline{FD} \parallel \overline{IH}$ y $A-F-G$.



Con base en ella clasifique según sus propiedades los siguientes cuadriláteros, siendo tan específico como sea posible.

a) $ABEF$

b) $BCDE$

c) $EDHG$

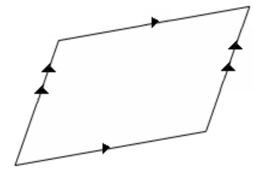
d) $AGDB$

e) $FIHD$

f) $AGEB$

g) $FEGI$

C. Paralelogramos



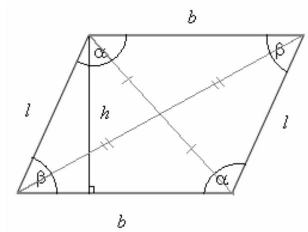
Los paralelogramos son cuadriláteros que tienen sus dos pares de lados opuestos paralelos.

Propiedades de cualquier paralelogramo:

- Los lados opuestos son congruentes.
- Los ángulos opuestos son congruentes.
- Los ángulos consecutivos son suplementarios
- Las diagonales se bisecan mutuamente.

Existen cuatro tipos de paralelogramos que estudiaremos por separado cada uno.

C.1 Romboide

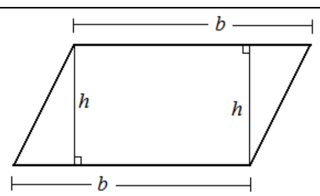
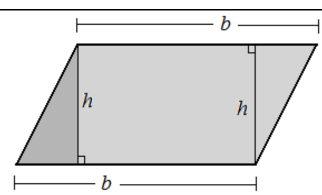
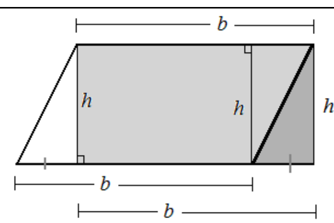
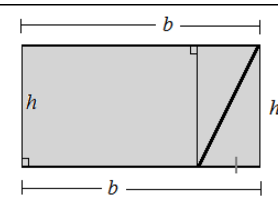


En la figura, $\alpha + \beta = 180°$

El **romboide** es un paralelogramo general, es decir, no tiene ninguna propiedad adicional a las mencionadas para cualquier paralelogramo.

No es ni equilátero ni equiángulo.

El área de un romboide es el producto de una base por su altura $A = b \cdot h$.

Partimos de un romboide con base b y altura h.	"Recortaremos" uno de los triángulos que se forma entre la altura y uno de los lados.	"Pegamos" contiguo al otro lado el triángulo que recortamos. Observemos que se forma un rectángulo de largo b y ancho h, dado que las figuras que quitamos y pegamos coinciden.	En la transformación que realizamos el área no cambia y, por lo tanto, podemos deducir que el área del romboide es igual al área del rectángulo formado: $A_{\square} = b \cdot h$.
			

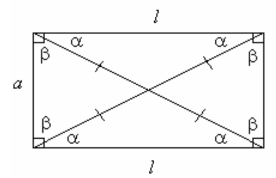
EJEMPLO 4. En un paralelogramo hay un ángulo interno que mide $150°$ y está formado por lados que miden $10cm$ y $8cm$.

a) Calcule la medida de todos los ángulos.

b) ¿Cómo se clasifica el paralelogramo?

c) Si la altura mide $5\,cm$, ¿Cuánto es el área del cuadrilátero?

C.2 Rectángulo



En la figura, $\alpha+\beta=90°$

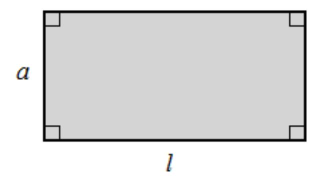
Si en un paralelogramo los cuatro ángulos son congruentes, entonces cada uno de ellos debe ser recto. Así, el cuadrilátero equiángulo se llama **rectángulo.**

Propiedades del rectángulo:

- Las diagonales son congruentes y como cualquier paralelogramo, se bisecan mutuamente. Esto significa, que se forman triángulos isósceles como en la figura.
- En un rectángulo general los lados son de diferente medida. Cuando en un rectángulo los lados son congruentes nos estaremos refiriendo a un **cuadrado.**

Como definición básica de área tomaremos el área de un rectángulo como el producto del largo por el ancho.
Con base en esto, justificaremos las fórmulas de área para los demás cuadriláteros y para un triángulo.

El **área de un rectángulo** se calcula como el producto del largo por el ancho: $A = l \cdot a$ donde a es la medida del ancho y l la medida del largo.
Además, el perímetro del rectángulo se calcula: $P = 2a + 2l$.

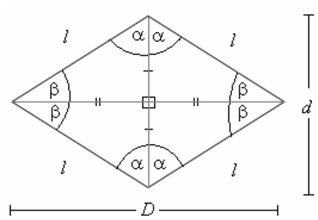


EJEMPLO 5. **Encuentre el área y el perímetro de un rectángulo de largo $14\,cm$ y ancho $5\,cm$**

EJEMPLO 6. **En un rectángulo de perímetro $40\,cm$, el largo mide $12\,cm$. Encuentre el área.**

C.3 Rombo

Cuando en un paralelogramo los cuatro lados son congruentes este se llama **rombo** y por eso lo llamamos **equilátero**.



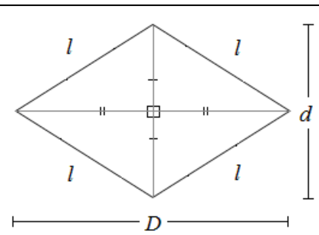
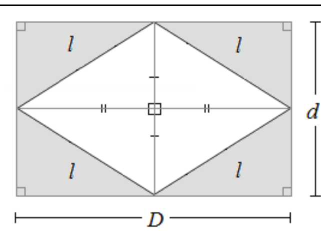
En la figura, $\alpha+\beta=90°$

Propiedades del rombo:

- En un rombo general los ángulos son de diferente medida.
- Como consecuencia de la desigualdad triangular la diagonal mayor está opuesta al ángulo mayor.
- Las diagonales son perpendiculares, se bisecan mutuamente y bisecan los ángulos internos.

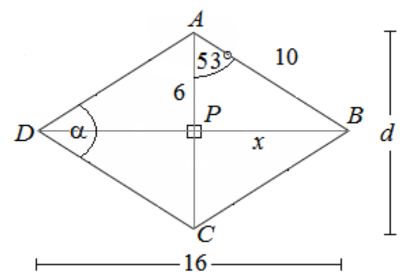
El área de un rombo es la mitad del producto de sus diagonales $A = \dfrac{d \cdot D}{2}$

Para el **perímetro de un rombo** se utiliza $P = 4l$, donde l es la medida del lado.

<table>
<tr><td>Partimos de un rombo con diagonal menor d y diagonal mayor D .</td><td>Duplicamos el área del rombo, construyendo exteriormente triángulos con las mismas medidas a los que se forman entre las diagonales.</td><td rowspan="2">Observemos que se forma un rectángulo de ancho d y largo D .
Entonces, el área del rombo es la mitad del área de ese rectángulo y por lo tanto $A = \dfrac{d \cdot D}{2}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

EJEMPLO 7. En el rombo de la figura,

$DB = 16cm,\ AP = 6cm,\ m\angle PAB = 53°$ **y** $AB = 10cm$ **.**



a) Encuentre el perímetro del rombo.

b) Encuentre la diagonal menor.

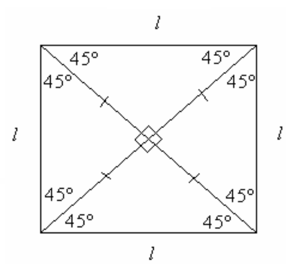
c) Encuentre el área.

d) Encuentre α.

C.4 Cuadrado

El paralelogramo con más propiedades es el **cuadrado.**

Es un cuadrilátero equilátero y equiángulo, por eso se le llama **regular.**



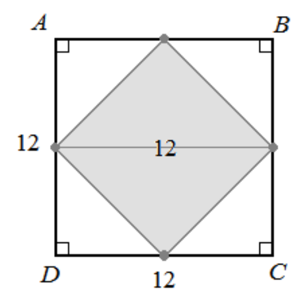
Propiedades del cuadrado:

- Cumple todas las propiedades del rombo y también las del rectángulo.
- Las diagonales son perpendiculares, se bisecan mutuamente, son congruentes y bisecan los ángulos internos.
- Del punto anterior se deduce que las diagonales forman ángulos de $45°$ con los lados.

EJEMPLO 8. Encuentre dos fórmulas para encontrar el área de un cuadrado de lado l

El **perímetro de un cuadrado** se puede calcular: $P = 4l$, donde l representa la medida del lado.

EJEMPLO 9. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado $12cm$.



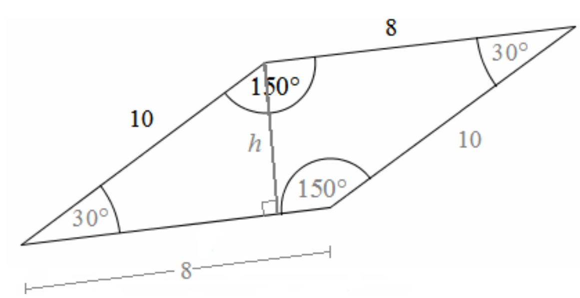
a) ¿Cuánto es el área del cuadrado $ABCD$?

b) ¿Cuánto es el perímetro del cuadrado $ABCD$?

c) ¿Cuánto es el área del cuadrado formado por los puntos medios de ese cuadrado?

Soluciones C.

EJEMPLO 4. En un paralelogramo hay un ángulo interno que mide $150°$ y está formado por lados que miden $10cm$ y $8cm$.



a) Calcule la medida de todos los ángulos.

Como los lados opuestos son congruentes, entonces los demás lados también miden $10cm$ y $8cm$. Además, los ángulos consecutivos son suplementarios, y los opuestos congruentes y, por lo tanto, los demás ángulos deben medir $30°, 150°$ y $30°$.

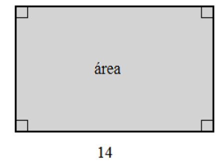
b) ¿Cómo se clasifica el paralelogramo?

El paralelogramo es un romboide porque no es ni equilátero ni equiángulo.

c) Si la altura mide $5\,cm$, ¿cuánto es el área del cuadrilátero?

En tal caso, el área es $A = 8 \cdot 5 = 40cm^2$.

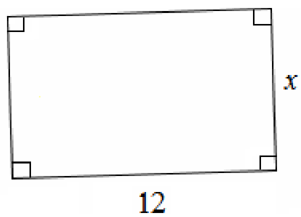
EJEMPLO 5. Encuentre el área y el perímetro de un rectángulo de largo $14\,cm$ y ancho $5\,cm$.



El área es $A = l \cdot a \Rightarrow A = 14 \cdot 5 \Rightarrow A = 70\,cm^2$.

El perímetro es $P = 2a + 2l \Rightarrow P = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 14 \Rightarrow P = 10 + 28 \Rightarrow P = 38cm$.

EJEMPLO 6. En un rectángulo de perímetro $40\,cm$, el largo mide $12cm$. Encuentre el área.



Sustituyendo en la expresión $P = 2a + 2l$ obtenemos $40 = 2a + 2 \cdot 12 \Rightarrow 40 = 2a + 24$ y para encontrar el ancho obtenemos que $2a = 40 - 24 \Rightarrow 2a = 16$, entonces el ancho es la mitad de 16 y por lo tanto $a = 8$.

El área se calcula $A = a \cdot l \Rightarrow A = 8 \cdot 12 \Rightarrow A = 96\,cm^2$.

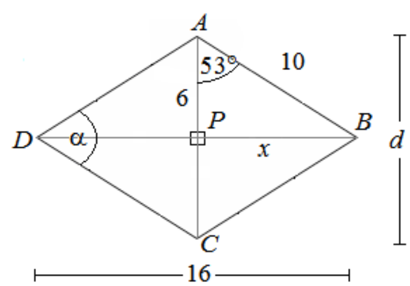
EJEMPLO 7. En el rombo de la figura, $DB = 16cm$, $AP = 6cm$, $m\angle PAB = 53°$ y $AB = 10cm$.

a) Encuentre el perímetro del rombo.

El perímetro es $P = 4l \Rightarrow P = 4 \cdot 10 = 40cm$.

b) Encuentre la diagonal menor.

Como en un rombo, al igual que en cualquier paralelogramo, las diagonales se bisecan, tenemos que AC debe ser el doble de AP. Entonces, $AC = 2 \cdot 6 \Rightarrow AC = 12$.



c) Encuentre el área.

Al utilizar la fórmula, tenemos:

$$A = \frac{d \cdot D}{2} \Rightarrow A = \frac{12 \cdot 16}{2} \Rightarrow A = \frac{192}{2} \Rightarrow A = 96cm^2$$

d) Encuentre α.

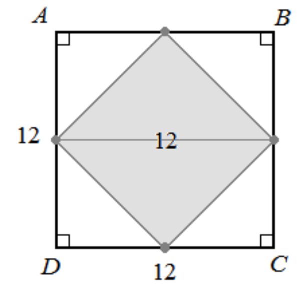
Si $\angle PAB = 53°$ entonces $\angle DAB = 106°$ porque en un rombo las diagonales son bisectrices de los ángulos internos, y como $\angle ADC$ y $\angle DAB$ son suplementarios, entonces $\alpha = 180° - 106° \Rightarrow \alpha = 74°$.

EJEMPLO 8. Encuentre dos fórmulas para encontrar el área de un cuadrado de lado l.

Un cuadrado cumple las propiedades de un rectángulo y por lo tanto, el área se puede calcular como el producto de sus dimensiones. Pero como los lados miden igual tenemos: $A = l \cdot l \Rightarrow$ $\boldsymbol{A = l^2}$.

Además, también cumple las propiedades de un rombo y por lo tanto, el área se puede calcular como la mitad del producto de sus diagonales. Como estas diagonales miden igual tenemos: $A = \frac{d \cdot d}{2} \Rightarrow \boldsymbol{A = \frac{d^2}{2}}$.

EJEMPLO 9. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado $12cm$.



a) ¿Cuánto es el área del cuadrado $ABCD$?

Utilizando $A = l^2$ obtenemos, $A = 12^2 \Rightarrow A = 144cm^2$.

b) ¿Cuánto es el perímetro del cuadrado $ABCD$?

Para el perímetro, tenemos que $P = 4 \cdot 12 \Rightarrow P = 48cm$.

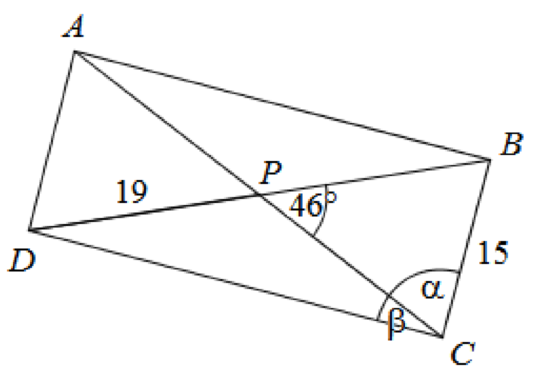
c) ¿Cuánto es el área del cuadrado formado por los puntos medios de ese cuadrado?

Observemos que la medida de la diagonal de este cuadrado coincide con la medida de los lados del cuadrado $ABCD$. Entonces, para encontrar el área de ese cuadrado utilizamos $A = \frac{d^2}{2}$ y por lo tanto:

$$A = \frac{12^2}{2} \Rightarrow A = \frac{144}{2} \Rightarrow A = 72cm^2.$$

Ejercicio C.

1. En la siguiente figura $ABCD$ es un rectángulo.



a) Si $DP = 19$ encuentre AP y PC.

b) Encuentre α.

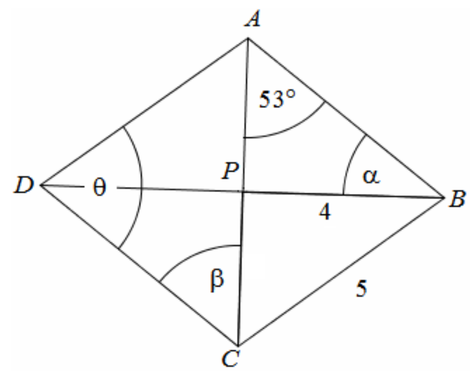
c) Encuentre β.

d) Si el perímetro del ΔABC es 88, encuentre AB.

e) Encuentre el área del $ABCD$.

f) Encuentre el perímetro del $ABCD$.

2. En la siguiente figura $ABCD$ es un rombo.



a) Encuentre α.

b) Encuentre β.

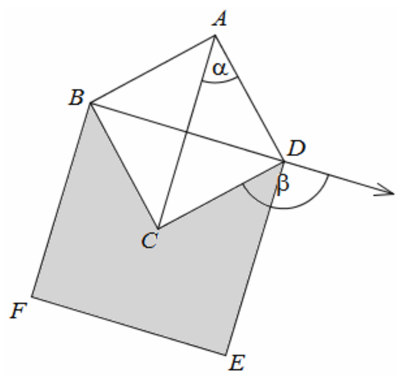
c) Encuentre θ.

d) Si $AC = 6$ encuentre PC.

e) Encuentre el área del $ABCD$.

f) Encuentre el perímetro del $ABCD$.

3. En la siguiente figura $ABCD$ y $BDEF$ son cuadrados:



a) Encuentre α.

b) Encuentre β.

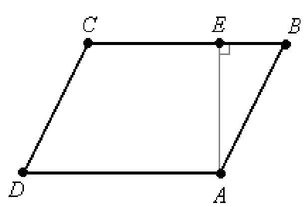
c) Si $BD = 18cm$, encuentre $(ABCD)$.

d) Encuentre $(BDEF)$.

e) Encuentre el perímetro de $\square BDEF$.

f) Encuentre el área sombreada.

4. En el siguiente paralelogramo, el área es $96cm^2$, $DC = 10cm$ y $AE = 6cm$. ¿Cuánto es el perímetro?



5. En un rombo, la diagonal menor mide $6cm$ y la diagonal **mayor** $10,4cm$. Encuentre el área. del rombo.

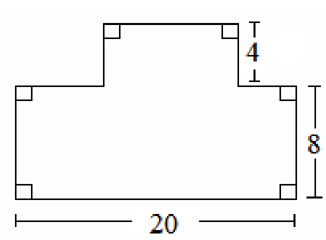
6. En un rombo $ABCD$ se tiene que $m\angle A = 120°$. ¿Qué tipo de triángulo es ΔABC? Si la diagonal **menor** $8cm$, encuentre el perímetro del rombo.

7. El perímetro de un rectángulo es $17m$ y el ancho es $2,5m$. ¿Cuánto es el área del rectángulo?

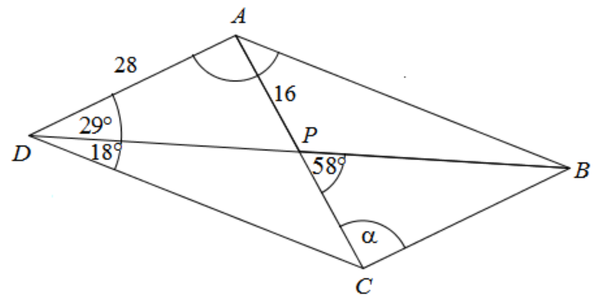
8. El largo de un terreno rectangular es $10m$ menor que el doble del ancho. Si el perímetro del terreno es $70m$, ¿Cuáles son las dimensiones del terreno.

9. En un rombo de área $150ul^2$, una diagonal mide el triple de la otra. ¿Cuánto mide cada diagonal?

10. Encuentre el perímetro de la siguiente figura:



11. En la siguiente figura $ABCD$ es un paralelogramo.



a) Encuentre $m\angle DAB$.

b) Encuentre α.

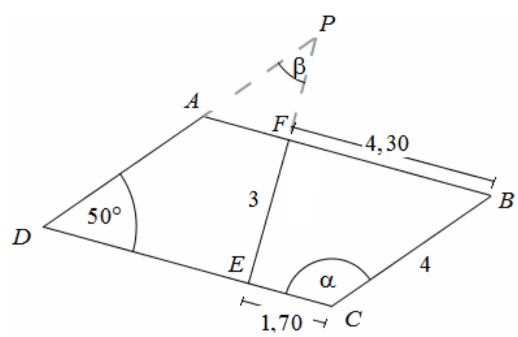
c) Si $DB = 64$ encuentre PB.

d) Si el perímetro del ΔADB es 135, encuentre AB.

e) Encuentre el perímetro del ΔACD.

f) Encuentre el perímetro del $ABCD$.

12. En la siguiente figura $ABCD$ es un romboide.



a) Encuentre α.

b) Encuentre AD.

c) Si $\overline{AE} \parallel \overline{FC}$, encuentre AB.

d) Encuentre el perímetro del $ABCD$.

e) Si $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ y $P = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{EF}$, encuentre β.

f) Encuentre el área del $\square ABCD$.

D. No paralelogramos

Los no paralelogramos se dividen en dos tipos: **trapecios** y **trapezoides.**

D.1 Trapecio

Los **trapecios** tienen un par de lados paralelos, a los cuales llamaremos **bases.**

Propiedades del trapecio:

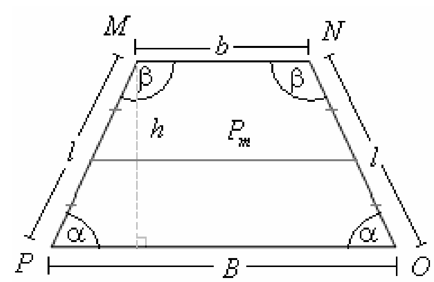
- El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se llama **paralela media.**
- Se cumple que $P_m = \frac{B+b}{2}$, donde B es la base mayor y b es la base menor.
- Existen tres tipos de trapecios.

<table>
<tr><td>

- En el **trapecio isósceles** los lados no paralelos son congruentes.

Además, los ángulos de las bases son congruentes y además, los ángulos formados por las bases y los lados no paralelos son suplementarios.

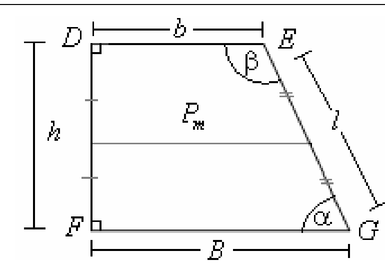
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

- El **trapecio rectángulo** tiene dos ángulos rectos y, por lo tanto, su altura coincide con uno de los lados no paralelos.

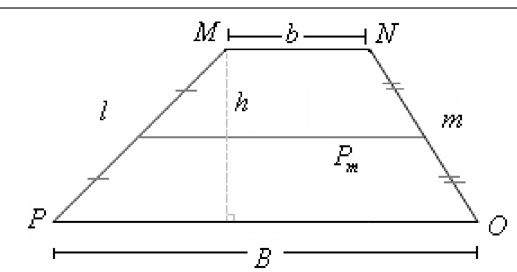
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

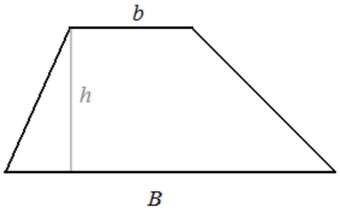
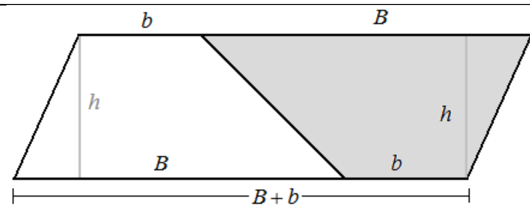
- El **trapecio escaleno** tiene sus cuatro ángulos de diferente medida. Por lo tanto, no es ni isósceles ni rectángulo.

</td><td>



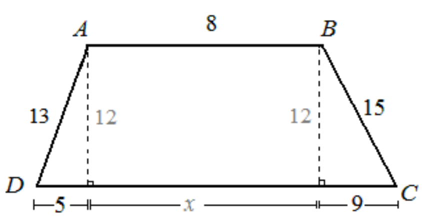
</td></tr>
</table>

El área de un trapecio es la mitad del producto de la suma de las bases por la altura $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$.

Partimos de un trapecio con base mayor B, base menor b y altura h.	"Duplicamos" el trapecio, colocando a la par una copia idéntica del trapecio. Observe que se forma un paralelogramo de base $B+b$ y la misma altura h.	El área de este paralelogramo es $A_{\square} = (B+b)\cdot h$ y el área del trapecio debe ser la mitad de este, es decir: $A_{\text{trapecio}} = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2}$
		

- Si reescribimos $\dfrac{B+b}{2} = P_m$ como la **paralela media**, obtenemos $A = P_m \cdot h$.

EJEMPLO 10. De acuerdo con los datos de la figura, ¿Cuál es el área y el perímetro del trapecio $ABCD$?



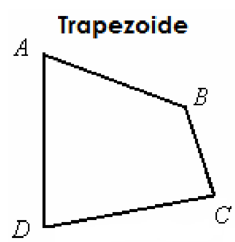
EJEMPLO 11. En un trapecio rectángulo, los lados no paralelos miden $12cm$ y $13cm$. Si la base menor mide $10cm$ y la paralela media mide $12,5\,cm$. Entonces, encuentre:

a) La base mayor.

b) El área del trapecio.

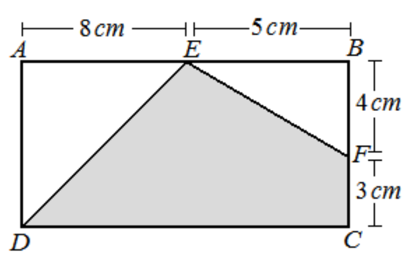
c) El perímetro.

D.2 Trapezoide



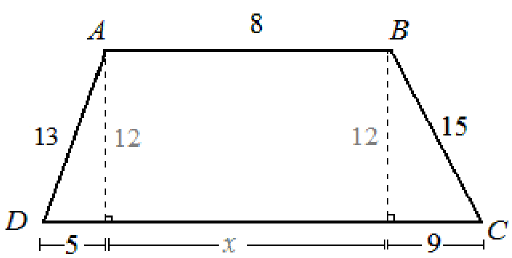
Los **trapezoides** no tienen pares de lados paralelos y por lo tanto ninguna propiedad especial diferente a las generales de cualquier cuadrilátero.

EJEMPLO 12. En la figura, $ABCD$ es un rectángulo, encuentre el área del trapezoide $DEFC$.



Soluciones D.

EJEMPLO 10. De acuerdo con los datos de la figura, ¿Cuál es el área y el perímetro del trapecio $ABCD$?



Observemos que el segmento x debe medir igual que la base menor y por lo tanto $x = 8$. Entonces, la base mayor mide $B = 5 + 8 + 9 = 22$.

Así, la paralela media es $P_m = \dfrac{B+b}{2} = \dfrac{22+8}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$ y el área es

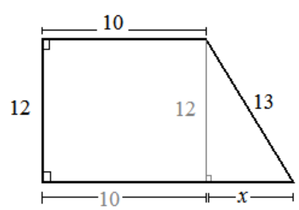
$A = P_m \cdot h \Rightarrow A = 15 \cdot 12 = 180$.

El perímetro es $P = 8 + 13 + 5 + 8 + 9 + 15 \Rightarrow P = 58$.

EJEMPLO 11. En un trapecio rectángulo, los lados no paralelos miden $12cm$ y $13cm$. Si la base menor mide $10cm$ y la paralela media mide $12{,}5\,cm$. Entonces, encuentre:

- En un trapecio rectángulo uno de los lados no paralelos coincide con la altura. En este ejemplo ese lado debe ser el que mide $12cm$, pues ésta es menor que el otro lado no paralelo.

a) La base mayor.



De la paralela media tenemos $P_m = 12{,}5 \Rightarrow \dfrac{B+b}{2} = 12{,}5$ entonces la suma de las bases es $B + b = 2 \cdot 12{,}5 \Rightarrow B + b = 25$. Como la base menor mide $10cm$ entonces, la base mayor mide: $B = 25 - 10 \Rightarrow B = 15\,cm$.

b) El área del trapecio.

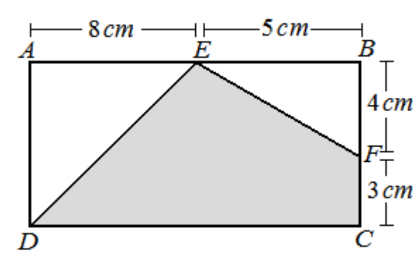
El área se puede calcular $A = P_m \cdot h \Rightarrow A = 12{,}5 \cdot 12 = 150cm^2$.

c) El perímetro.

El perímetro es igual a la suma de los lados, es decir: $P = 10 + 13 + 15 + 12 \Rightarrow P = 50\,cm$.

EJEMPLO 12. En la figura, $ABCD$ es un rectángulo, encuentre el área del trapezoide $DEFC$.

Para encontrar el área del trapezoide, encontraremos el área del rectángulo y le restaremos el área de los triángulos ΔAED y ΔBEF que son rectángulos porque $ABCD$ es un rectángulo.



Observe que $AB = 8 + 5 \Rightarrow AB = 13\,cm$ y $BC = 4 + 3 \Rightarrow BC = 7\,cm$.

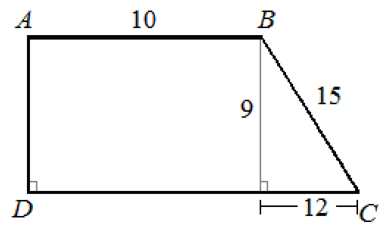
Entonces: $(ABCD) = 13 \cdot 7 \Rightarrow (ABCD) = 91\,cm^2$.

$(AED) = \dfrac{8 \cdot 7}{2} \Rightarrow (AED) = 28cm^2$ y $(BEF) = \dfrac{5 \cdot 4}{2} \Rightarrow (BEF) = 10cm^2$.

Por lo tanto, $(DEFC) = (ABCD) - (AED) - (EBF) \Rightarrow (DEFC) = 91 - 28 - 10 \Rightarrow (DEFC) = 53\ cm^2$.

Ejercicio D.

1. De acuerdo con los datos de la figura, ¿Cuál es el área y el perímetro del trapecio $ABCD$?



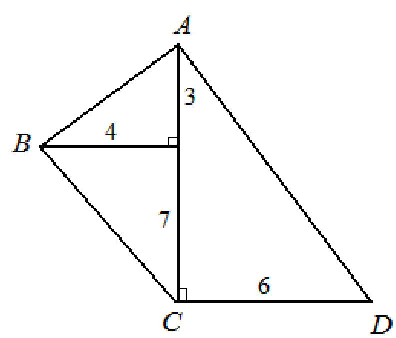
2. En un trapecio, la base mayor es $20cm$, la altura es $5cm$ y el área es $80cm^2$. ¿Cuánto mide la base menor?

3. En un trapecio isósceles, la base mayor $26cm$, la paralela media $18cm$, los lados congruentes $17cm$ y la altura $20cm$ menos que la mitad del perímetro. ¿Cuánto es el área del trapecio?

4. En el trapecio $ABCD$, los ángulos $\angle A$ y $\angle D$ son rectos. Si $AB = 10$, $BC = 15$, $DC = 22$ y el perímetro del trapecio es 56 ¿Cuánto es el área del trapecio?

5. En un triángulo equilátero ΔABC de lado $24cm$ se quiere trazar una paralela $\overline{DE}$ al lado $\overline{BC}$ de manera que el trapecio $DECB$ y el triángulo ΔADE tengan el mismo perímetro. Si $DE = 18$ encuentre EC.

6. Encuentre el área del siguiente trapezoide $ABCD$:



7. Un **trapezoide simétrico** es un trapezoide formado por dos triángulos isósceles diferentes con la misma base. Dibuja un trapezoide simétrico de lados $2cm, 2cm, 3cm$ y $3cm$.

8. Dibuja un trapezoide cuyas diagonales sean perpendiculares. Basado en el ejemplo que dibujaste ¿Cómo se puede encontrar el área de cualquier trapezoide cuyas **diagonales son perpendiculares**?

(Encuentra una fórmula en términos de las diagonales).

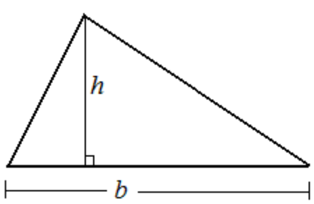
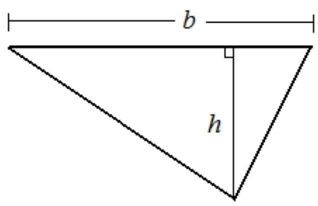
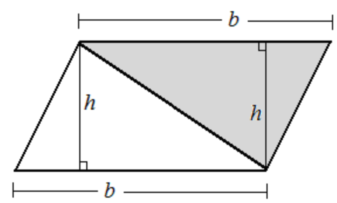
E. Áreas compuestas

Ejercicio Introductorio E. Con la idea de aproximar el área de Costa Rica, se realizó una estimación con base en el siguiente mapa donde la escala es 1cm=69km. En él se dibujó un trapecio y un rectángulo.

1. Mida los lados del trapecio y el rectángulo.
2. Dibuje y mida la altura del trapecio
3. Convierta esas medidas a kilómetros con base en la escala.
4. Calcule el área de los cuadriláteros y con eso, estime el área de Costa Rica.
5. ¿Qué tan buena es esa aproximación?
6. ¿Cómo podría mejorarse?

Ahora, justificaremos la fórmula del área de un triángulo utilizando cuadriláteros.

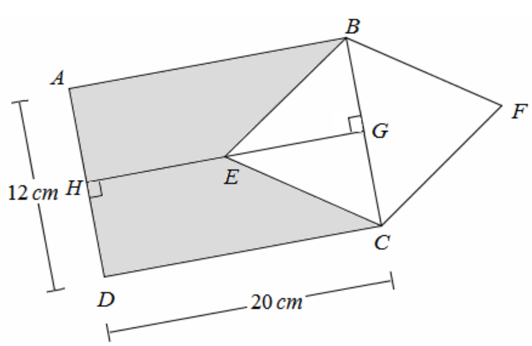
El área de un triángulo es la mitad del producto de una base por la altura $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$.

Partimos de un triángulo con base b y altura h.	"Duplicamos" el triángulo, invirtiendo su posición.	Al colocarlos a la par se forma un paralelogramo con base b y altura h de área $A_{\square} = b \cdot h$ y el área del triángulo debe ser la mitad de este, es decir: $A_{\triangle} = \dfrac{b \cdot h}{2}$.
		

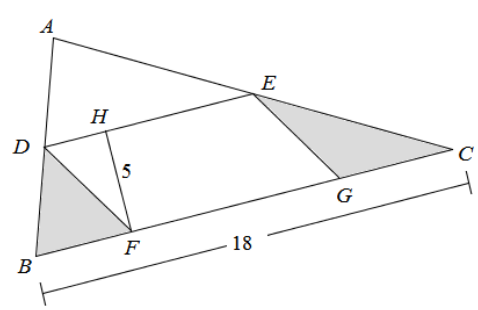
En los siguientes ejemplos, debemos descomponer en cuadriláteros que podamos calcular el área, para poder encontrar el área sombreada.

EJEMPLO 13. Encuentre el área sombreada en las siguientes figuras:

a) $ABCD$ **es un rectángulo,** $BEFC$ **es un rombo y** E **es el punto medio de** $\overline{HG}$**.**



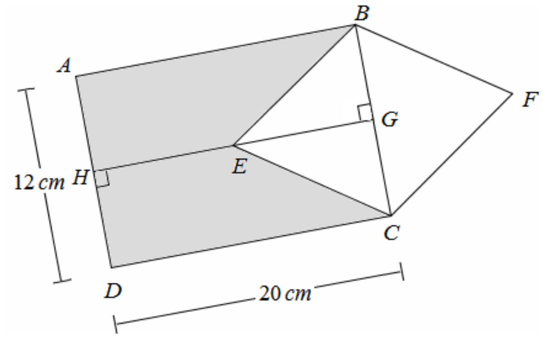
b) $\overline{DE}$ **es la paralela media a** $\overline{BC}$ **en el** ΔABC**,** $\overline{HF} \perp \overline{DE}$ **y** $DEGF$ **es un paralelogramo.**



Soluciones E.

EJEMPLO 13. Encuentre el área sombreada en las siguientes figuras:

a) $ABCD$ **es un rectángulo,** $BEFC$ **es un rombo y** E **es el punto medio de** $\overline{HG}$**.**



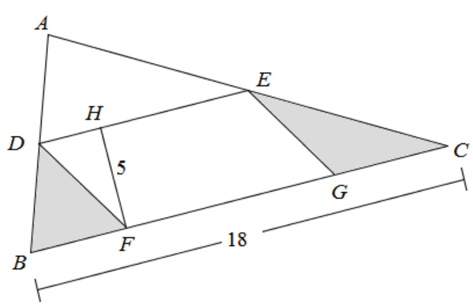
Para encontrar el área sombreada, restaremos la mitad del área del rombo al área del rectángulo:

$$A_{\text{sombreada}} = A_{\text{rectángulo}} - \frac{A_{\text{rombo}}}{2} \text{; tenemos } A_{\text{rectángulo}} = 20 \cdot 12 = 240cm^2.$$

Como E es el punto medio de $\overline{GH}$, entonces $EG = 10cm$ y por lo tanto $EF = 20cm$. Entonces, el área del rombo es:

$A_{\text{rombo}} = \frac{d \cdot D}{2} = \frac{20 \cdot 12}{2} = 120\,cm^2$. Por último, el área sombreada es: $A_{\text{sombreada}} = 240 - \frac{120}{2} = 240 - 60 = 180\,cm^2$.

b) $\overline{DE}$ **es la paralela media a** $\overline{BC}$ **en el** ΔABC**,** $\overline{HF} \perp \overline{DE}$ **y** $DEGF$ **es un paralelogramo.**



El área sombreada es igual al área del trapecio $BDEC$ menos el área del paralelogramo $DEGF$. Como $\overline{DE}$ es la paralela media a $\overline{BC}$ entonces $DE = \frac{BC}{2} \Rightarrow DE = \frac{18}{2} \Rightarrow DE = 9$. Luego, el área del trapecio es:

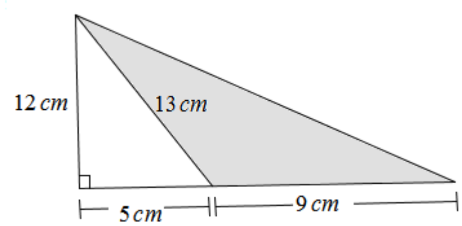
$$A_{\text{trapecio}} = \frac{18+9}{2} \cdot 5 = \frac{27}{2} \cdot 5 = 67,5 .$$

El área del paralelogramo es: $A_{\text{paralelogramo}} = DE \cdot HF \Rightarrow A_{\text{paralelogramo}} = 9 \cdot 5 = 45$ y el área sombreada es:

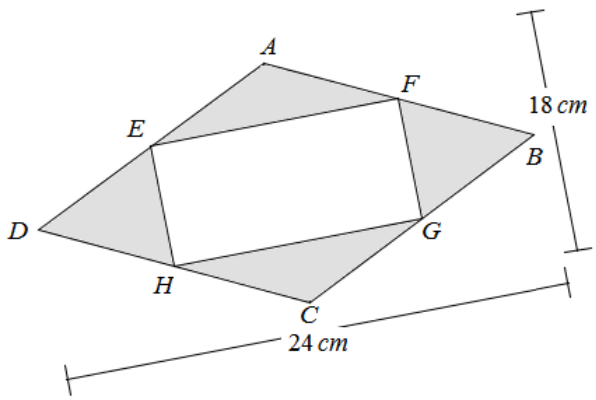
$$A_{\text{sombreada}} = A_{\text{trapecio}} - A_{\text{paralelogramo}} \Rightarrow A_{\text{sombreada}} = 67,5 - 45 \Rightarrow A_{\text{sombreada}} = 22,5$$

Ejercicio E. Encuentre el área sombreada en las siguientes figuras:

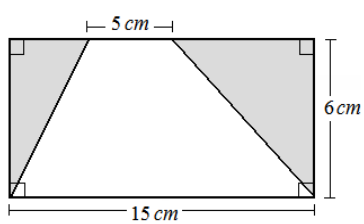
1.



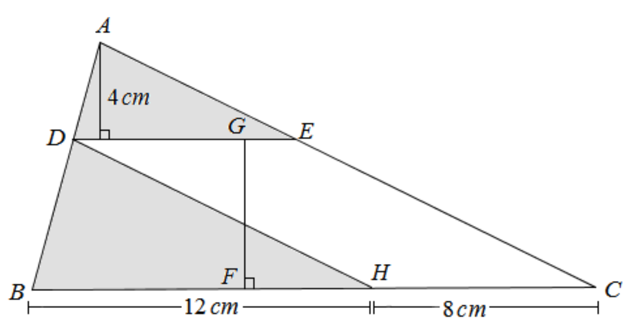
2. $ABCD$ es un rombo y $EFGH$ el rectángulo formado por los puntos medios de los lados del rombo.



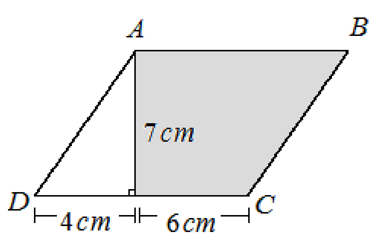
3.



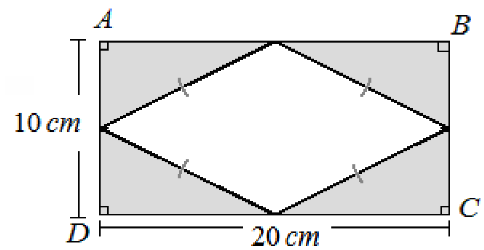
4. $DECH$ es un paralelogramo y $FG = 6\,cm$.



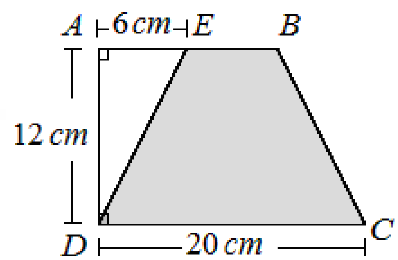
5. $ABCD$ es un paralelogramo.



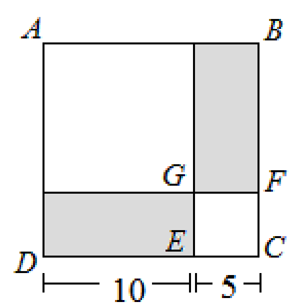
6. $ABCD$ es un rectángulo.



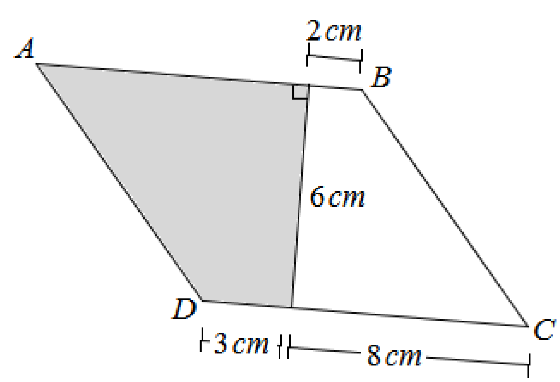
7. $ABCD$ es un trapecio rectángulo y $EBCD$ es un trapecio isósceles.



8. $ABCD$ y $GFCE$ son cuadrados.



9. $ABCD$ es un paralelogramo.



AUTOEVALUACIÓN Cuadriláteros

I PARTE. Escribir F (Falso) ó V (Verdadero) según corresponda a la proposición dada.

1.___ En todo cuadrilátero, las diagonales se cortan en sus puntos medios.

2.___ En un rombo, las diagonales son congruentes.

3.___ En un cuadrado, las diagonales son perpendiculares.

4.___ Si un ángulo de un trapecio es $100°$, entonces hay otro que mide $80°$.

5.___ En un rectángulo, las diagonales son bisectrices de los ángulos internos.

6.___ En el rectángulo $ABCD$ el ángulo $\angle ACD$ es agudo.

7.___ Si un cuadrilátero tiene sus lados congruentes es con certeza un cuadrado.

8.___ Un trapecio no puede tener tres lados congruentes.

9.___ Un trapecio siempre tiene dos ángulos agudos y dos obtusos.

10.___ En un rombo $ABCD$, si $m\angle A > m\angle B$, entonces $AC < BD$.

11.___ En un trapecio los cuatro ángulos tienen diferente medida.

12.___ En cualquier cuadrilátero la suma de los ángulos internos es $360°$.

13.___ Un trapecio rectángulo tiene dos ángulos rectos.

14.___ En el rectángulo $ABCD$, las diagonales se intersecan en P. Entonces, $\overline{PB} \cong \overline{CP}$.

15.___ Al girar $45°$ un rombo, se obtiene un cuadrado.

II PARTE: Complete el siguiente cuadro con sí o no, dependiendo si con certeza se puede asegurar que el cuadrilátero cumple o no las propiedades señaladas:

	Lados opuestos congruentes	Lados consecutivos Congruentes	Ángulos opuestos congruentes	Ángulos consecutivos congruentes	Las diagonales bisecan los ángulos internos	Las diagonales se bisecan mutuamente	Las diagonales son perpendiculares
Trapezoide							
Trapecio							
Cuadrado							
Rectángulo							
Romboide							
Rombo							

III PARTE: Selección única

1) Para un rectángulo $\square ABCD$, analice las siguientes proposiciones:

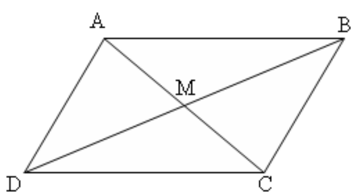
I. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

II. $0° < m\angle BAC < 90°$

De la ellas ¿cuáles son verdaderas?

A) Solo la I.
B) Solo la II.
C) Ambas.
D) Ninguna.

2) En el paralelogramo $ABCD$, con certeza se cumple que:



A) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

B) $\overline{BM} \cong \overline{MA}$

C) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

D) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

3) Sea $\square ABCD$ un rombo. Si $m\angle ABC = 34°$, entonces, ¿cuál es la medida del $\angle BAD$?

A) $56°$
B) $68°$
C) $112°$
D) $146°$

4) El largo de un rectángulo mide $12cm$. Si el perímetro es $32cm$, ¿cuánto es el área?

A) $48\,cm^2$

B) $120\,cm^2$

C) $240\,cm^2$

D) $384\,cm^2$

5) En el trapecio $RSTU$ los ángulos $\angle R$ y $\angle U$ son rectos, $RU = 24ul$, la paralela media $\frac{27}{2}ul$ y $ST = 25ul$. Entonces el área del trapecio es:

A) $337,5ul^2$

B) $168,75ul^2$

C) $324ul^2$

D) $162ul^2$

6) En un rombo las diagonales miden $18m$ y $24m$. Entonces, el área del rombo es:

A) $432\,m^2$

B) $21\,m^2$

C) $42\,m^2$

D) $216\,m^2$

7) Si el área de un cuadrado es $\frac{36}{64}$, entonces ¿cuál es el perímetro de ese cuadrado?

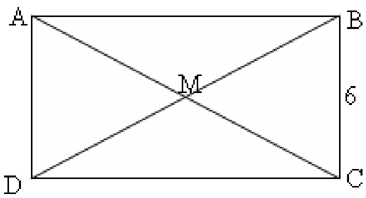
A) 1

B) 3

C) $\frac{9}{4}$

D) $\frac{9}{16}$

8) De acuerdo con los datos de la figura, si $\square ABCD$ es un rectángulo y $AM = DA$ entonces ¿cuál es la medida de $\angle DMC$?



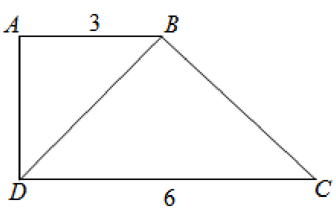
A) $90°$

B) $60°$

C) $150°$

D) $120°$

9) De acuerdo con los datos de la figura, si $ABCD$ es un trapecio y el área del ΔABD es $\frac{21}{4}$ entonces, ¿cuál es el área del ΔBCD?



A) 9

B) $\frac{7}{2}$

C) $\frac{21}{4}$

D) $\frac{21}{2}$

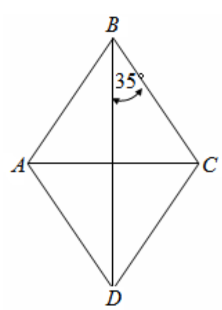
10) De acuerdo con los datos de la figura, si $ABCD$ es un rombo, entonces con certeza se cumple que:

A) $m\angle BAD = 70°$

B) $m\angle BCD = 90°$

C) $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

D) $\overline{AB} \perp \overline{AD}$



11) Considere las siguientes proposiciones:

i) En todo paralelogramo los ángulos internos son congruentes.

ii) En todo paralelogramo los ángulos internos son agudos.

De ellas son VERDADERAS:

A) Solo la I.

B) Solo la II.

C) Ambas.

D) Ninguna.

12) Analice las siguientes proposiciones:

i) En todo paralelogramo las diagonales se bisecan.

ii) En todo rombo las diagonales son perpendiculares.

De ellas, ¿cuáles son VERDADERAS?

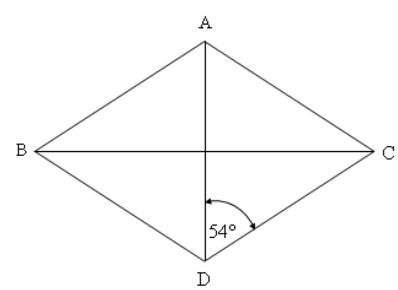
A) Ambas.

B) Ninguna.

C) Solo la I.

D) Solo la II.

13) De acuerdo con los datos de la figura, si $\square ABCD$ es un rombo, ¿cuál es la medida del $\angle DAB$?



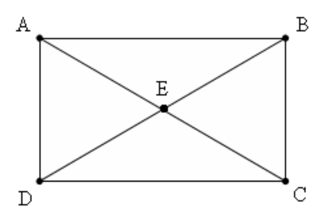
A) $108°$

B) $72°$

C) $54°$

D) 36

14) Considere el siguiente rectángulo $\square ABCD$ y las proposiciones respecto de él.



i) $AC = 2DE$

ii) $\overline{AC} \perp \overline{DB}$

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas.

B) Ninguna.

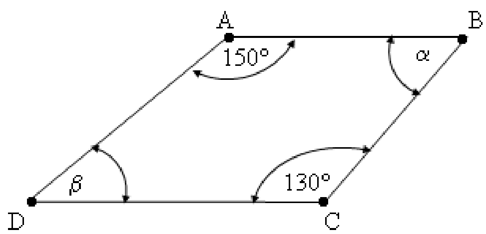
C) Solo la I.

D) Solo la II.

15) Si las diagonales de un cuadrilátero no son congruentes y son perpendiculares entre sí, entonces el cuadrilátero necesariamente es un:

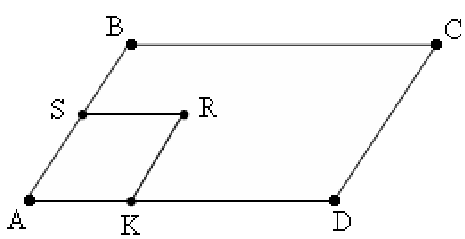
A) Romboide.
B) Rectángulo.
C) Cuadrado.
D) Rombo.

16) De acuerdo con los datos de la figura, si $\overrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, entonces se cumple con certeza que:



A) $\alpha = \beta$
B) $\alpha < \beta$
C) $\alpha - \beta = 20°$
D) $\alpha + \beta = 90°$

17) De acuerdo con los datos de la figura, si $\square ABCD$ y $\square ASRK$ son paralelogramos, entonces con certeza se cumple que:



A) $SR = RK$
B) $AR = RB$
C) $m\angle A = m\angle S$
D) $m\angle R = m\angle C$

18) Considere las siguientes proposiciones, con respecto al rectángulo $ABCD$ donde P es el punto de intersección de sus diagonales:

i) $\angle DAC$ y $\angle DBC$ son dos ángulos congruentes.
ii) El ΔDPC es rectángulo.

De ellas son verdaderas:

A) Solo la i).
B) Solo la ii).
C) Ambas.
D) Ninguna.

19) ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son siempre verdaderas?

i) Un trapecio tiene sus lados paralelos dos a dos.
ii) En un trapecio isósceles los ángulos de la base son congruentes.
iii) La suma de los ángulos internos de un trapezoide es igual a la de suma de ángulos internos de un cuadrado.

A) Todas.
B) Ninguna.
C) I y II.
D) II y III.

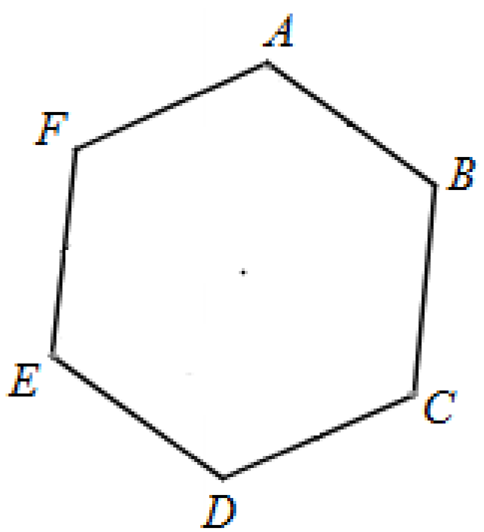
20) Considere las siguientes proposiciones, con respecto al rombo $ABCD$:

i) Si $\angle BAC$ y $\angle CDB$ son dos ángulos complementarios.
ii) Si $m\angle BAC > m\angle BDC$ entonces $DB > AC$.

De ellas son verdaderas:

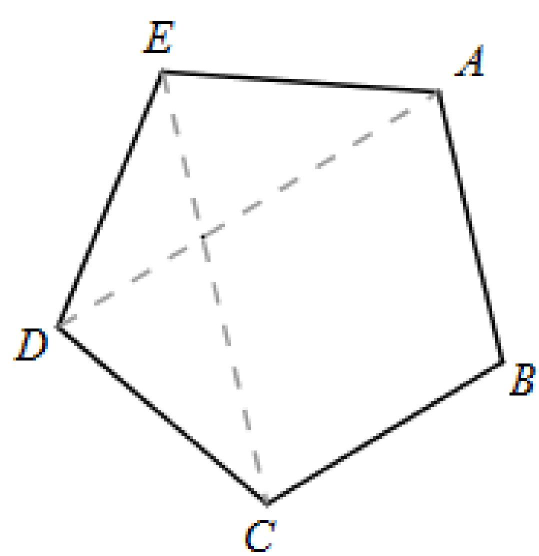
A) Solo la i).
B) Solo la ii).
C) Ambas.
D) Ninguna.

IV PARTE: En la figura se muestra un hexágono regular (todos los ángulos son congruentes, y los lados también son congruentes) $ABCDEF$. Trace el triángulo ΔAEC



1. Si todos los ángulos internos suman $720°$, ¿cuánto mide cada ángulo interno?
2. Si el perímetro del hexágono es 120, ¿cuánto mide cada lado?
3. Nombre con G, H e I los puntos medios de $\overline{AB}, \overline{CD}$ y $\overline{FE}$ respectivamente. Trace el ΔGHI.
4. Clasifique por sus lados los triángulos ΔAEC, ΔABC, ΔABD y ΔGHI.
5. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle IGB$?
6. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle CAB$?
7. ¿Se cumple $\overline{IG} \perp \overline{AC}$?
8. ¿Es $\overline{AD}$ la bisectriz del $\angle EDC$?
9. ¿Se cumple $\overline{BC} \| \overline{AD}$?
10. Sea O el incentro del triángulo ΔAEC, ¿se cumple la relación $F-O-C$?
11. ¿Se cumple $\overline{AD} \| \overline{BC}$?
12. Justifique que $ODBC$ es un paralelogramo.
13. ¿Cuál es la paralela media del trapecio $ADCB$?
14. ¿Cuánto mide $\overline{AD}$? ¿Cuánto mide $\overline{GH}$?
15. M es el punto medio de $\overline{DC}$. Si $OM = 17,32$, calcule el área del paralelogramo $ODBC$.
16. Calcule el área del trapecio $ADCB$.
17. Calcule el área del hexágono $ABCDEF$.
18. Calcule el área del trapecio $GHCB$.
19. Restando áreas encuentre el área del ΔGHI.
20. ¿Es $AOCB$ un rombo?
21. Justifique que $(AOC) = (ABC)$, que $(AEC) = 3(ABC)$.
22. ¿Qué relación hay entre (AEC) y $(ABCDEF)$?

V PARTE: En la figura se muestra el pentágono regular (todos los ángulos son congruentes, y los lados también son congruentes) $ABCDE$, donde se trazaron las diagonales $\overline{EC}$ y $\overline{AD}$.



1. Señale el punto $\{P\} = \overline{EC} \cap \overline{AD}$.
2. Señale el punto M el punto medio de $\overline{ED}$.
3. Con los puntos señalados encuentre un paralelogramo.
4. ¿Se cumple la relación $M-P-B$?
5. ¿Se cumple $\overline{EA} \perp \overline{ED}$?
6. ¿Es $\overline{AD}$ la bisectriz del $\angle EDC$?

7. ¿Se cumple $\overline{BC} \| \overline{AD}$?

8. Trace la altura en el ΔEAC sobre el lado desigual. ¿Es esta altura mediana?

9. Los cinco ángulos internos del pentágono suman 540°. ¿Cuánto mediría cada ángulo interno?

10. Trace la diagonal $\overline{DB}$. ¿Es $\overline{DB}$ la bisectriz del $\angle ADC$?

11. Los tres ángulos $\angle EDA$, $\angle ADB$ y $\angle BDC$ son congruentes. ¿Cuánto miden los ángulos $\angle EDA$ y $\angle APC$?

12. ¿Es $ABCP$ un rombo? ¿por qué?

13. Los lados del pentágono miden 12 cada uno. ¿Cuánto es el perímetro?

14. Sea $\{Q\} = \overline{DB} \cap \overline{EC}$. Si $ED = 12$, ¿cuánto mide $\overline{EQ}$?

15. ¿Es Q el punto medio de $\overline{DB}$?

16. Si $PQ \approx 4,58$, ¿Cuánto mide $\overline{EP}$?

17. Justifique que $\overline{EP} \cong \overline{QC}$. ¿Cuánto mide $\overline{EC}$?

18. Si la altura del trapecio $ECBA$ mide aproximadamente $11,41$ calcule el área de ese trapecio.

19. ¿Cuánto mide la altura del trapecio $PQBA$? Encuentre el área del trapecio.

20. Restando áreas encuentre el área del ΔEPA.

21. Encuentre las siguientes áreas (DPC), $(APCB)$, (APC).

22. Note que $(EDCA) = (ECBA)$, ¿cuánto es (EPD)?

23. ¿Cuánto es el área del pentágono?

VI PARTE: Resuelva los siguientes problemas.

1. Encuentre el área de las siguientes figuras:

a) Un triángulo cuya base es $15m$ y su altura es $7m$.

b) Un trapecio si las bases miden $17cm$ y $33cm$ y su altura mide $12cm$.

c) Un rectángulo, si el largo mide $7cm$ y el ancho $3cm$

d) Un cuadrado cuyo lado mide $21cm$.

e) Un rombo cuyas diagonales miden $8dm$ y $4dm$.

2. En el ΔABC, se tiene $AC = AB = 12cm$ y $BC = 8cm$.

Encuentre el perímetro del trapecio formado por $\overline{BC}$ y su paralela media.

3. En un trapecio rectángulo, los lados no paralelos miden $4cm$ y $5cm$. Si las bases miden $10cm$ y $7cm$, Encuentre:

a) La paralela media.

b) El área del trapecio.

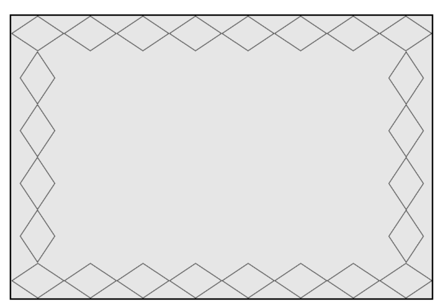
4. En un rombo el área es $240cm^2$ y una diagonal mide $30cm$. ¿Cuánto mide la otra diagonal?

5. En un cuadrado, la diagonal mide $15cm$. ¿Cuánto es el área del cuadrado?

6. Determine el área del cuadrado formado por los puntos medios de los lados de un cuadrado de perímetro $24cm$.

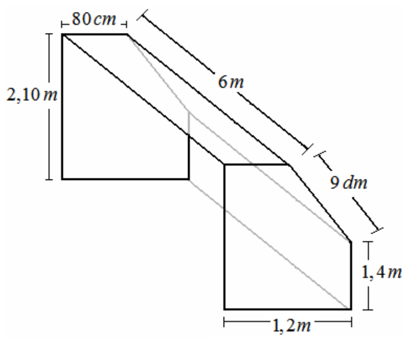
7. Un rectángulo está formado por dos cuadrados congruentes. Si el perímetro de ese rectángulo es $72cm$, encuentre el área de cada uno de los cuadrados.

8. Sebastián y Alejandra ayudan a su mamá a hacer un mantel individual con la forma de la figura. Todas las líneas negras, incluyendo el borde y los perímetros de los rombos, representan un encaje de color azul que le quieren colocar y el mantel será de tela anaranjada.



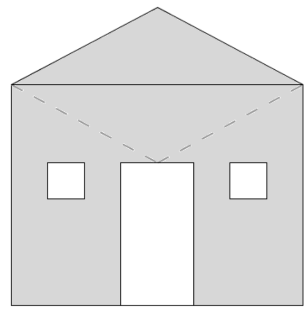
Cada rombo tienen diagonales $6cm$ y $8cm$ y el lado mide $10cm$. Si el metro de encaje azul cuesta ¢500 y el metro cuadrado de tela anaranjada cuesta ¢2000. ¿Cuánto deben invertir en materiales?

9. El gobierno estudiantil del colegio desea tener dos marcos para fútbol con la forma y medidas representadas en la figura.



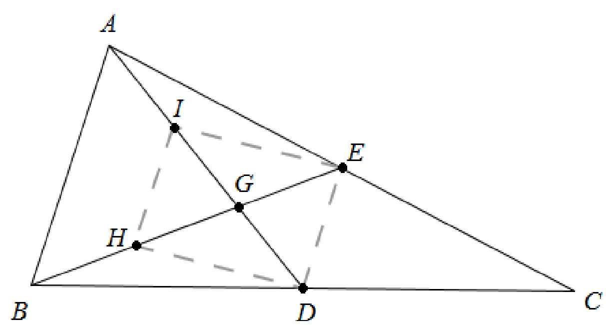
Un empresario del pueblo, les aseguró que si ellos compraban un tubo del tamaño necesario, su empresa les ayudaría cortando el tubo y armando los marcos. Si el metro de tubo cuesta $¢8000$ ¿Cuánto debe pagar el gobierno estudiantil para tener el tubo necesario?

10. Una familia desea pintar el frente rectangular de su casa incluyendo el techo como se muestra en la figura. La casa mide $4m$ de alto y tiene $12m$ de frente. El techo es la mitad de un rombo cuya otra diagonal mide $3m$. El ancho de la puerta es $2m$ y las ventanas son cuadrados de $1m$ de largo.



Encuentre el área que debe ser pintada.

11. Las propiedades de los paralelogramos nos permiten justificar propiedades que ya hemos estudiado. Por ejemplo, justificaremos que el baricentro de un triángulo, divide a cada mediana en razón $2:1$.



Sea ΔABC un triángulo con baricentro G y medianas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Sean H e I los puntos medios de $\overline{BG}$ y $\overline{AG}$ respectivamente. Probaremos que $AG = 2 \cdot GD$ completando las siguientes proposiciones:

a) $\overline{HI} \| \overline{AB}$ porque $\overline{HI}$ es la paralela media a $\overline{AB}$ en el triángulo: ___________.

b) $\overline{ED} \| \overline{AB}$ porque _______ es la ____________________________ a $\overline{AB}$ en el triángulo: ____________.

c) Y por lo tanto los segmentos $\overline{HI}$ y $\overline{ED}$ son: ______________________.

d) $\overline{IE} \| \overline{GC}$ porque _______ es la ______________________________ a $\overline{GC}$ en el triángulo ΔAGC.

e) $\overline{HD} \| \overline{GC}$ porque ____.

f) Y por lo tanto los segmentos $\overline{HD}$ y $\overline{IE}$ son: __________________.

g) Entonces, $\square IHDE$ es un _______________, y sus diagonales se _______________, lo que quiere decir que $IG = GD$.

h) Y como $AI = IG$ porque I es el ____________________ de $\overline{AG}$.

i) Podemos deducir que $AG = AI +$ _________ $\Rightarrow AG = IG + IG \Rightarrow AG = 2 \cdot IG \Rightarrow AG = 2 \cdot$ _________ .